IV Le calcul des probabilités

Les axiomes de Kolmogorov

- Nous allons attribuer des degrés aux propositions, compris entre 0 et 1, et notés Pr(P) : cela signifie **la probabilité de P**.
- L'idée c'est qu'une proposition certaine a une probabilité de 1, et qui si nous sommes certains qu'une proposition est fausse sa probabilité est de 0.
- De plus, une proposition a une probabilité comprise entre 0 et 1 lorsque nous ne sommes ni certains qu'elle est vraie, ni certains qu'elle est fausse.

- Donc :
  - Quelle que soit la proposition P :
    - $0 \leq Pr(P) \leq 1$
    - Si P est certaine, $Pr(P) = 1$

Andrei Kolmogorov
1903-1987

- Par ailleurs, **on peut additionner les probabilités lorsque les propositions sont incompatibles entre elles et qu'on utilise le mot « ou ».**

- Ainsi considérons un dé à six faces : les propositions « le dé tombe sur 1 » et « le dé tombe sur 2 » sont incompatibles, et donc on peut dire que Pr(le dé tombe sur 1 ou le dé tombe sur 2) = 1/6 + 1/6 = 1/3

- **Si P et Q sont incompatibles :**

  - **P(P ou Q) = Pr(P) + Pr(Q).**

Conséquences

- Les propositions P et non P sont incompatibles.
- Donc : Pr(P ou non P) = Pr(P) + Pr(non P).
- De plus : Pr (P ou non P) = 1.
  - Pourquoi d'ailleurs ?
- Donc : Pr(P) + Pr(non P) = 1
- Pr(P) = 1 - Pr(non P).

Exemple

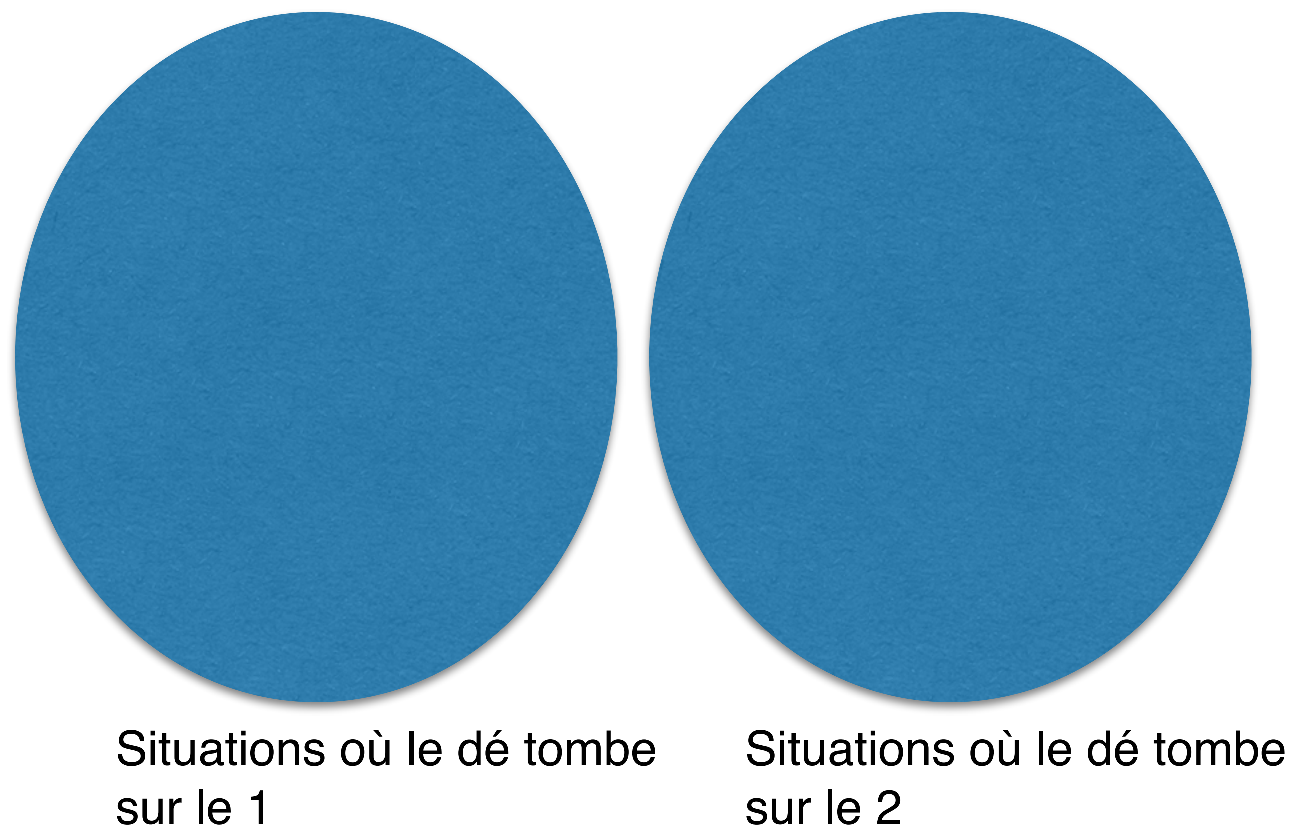
- Supposons que Pr(Jean est malade) = 1%.
- Pr(Jean n'est pas malade) = 100% - 1%= 99%

Addition

- On peut additionner les probabilités de propositions qui ne sont pas incompatibles :
- Si A et B ne sont pas incompatibles :
  - Pr (A ou B) = Pr (A) + Pr(B) - Pr(A et B)

Probabilité d’une conjonction

- Il n’y a pas de règle générale, mais on peut, dans certains cas, la déterminer.
- Premier cas : lorsque P et Q sont incompatibles, Pr(P et Q) = 0



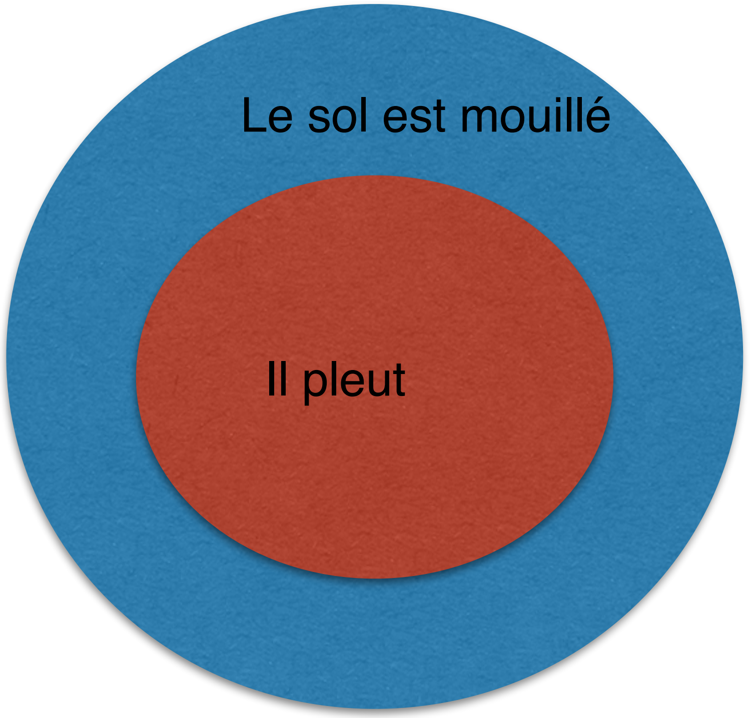
On peut constater que le dé ne tombe sur le 1 ET le 2 dans aucune situation = l’intersection de ces ensembles est vide

- Autre cas intéressant : lorsqu'une proposition P en implique logiquement une autre Q

- Ex : Il pleut →le sol est mouillé

- Pr (P et Q) = **Pr(P)**

- Pr (P ou Q) = Pr(P) + Pr(Q) - Pr(P)= **Pr(Q)**



Si toutes les situations où il pleut sont des situations où le sol est mouillé, la probabilité qu'il peut **et** que le sol est mouillé est la même que la probabilité qu'il pleut

La probabilité qu'il pleut **ou** que le sol est mouillé est la même que la probabilité que le sol est mouillé

V L’interprétation des probabilités

L'interprétation subjective et l'interprétation objective

- On appelle « probabilistes » les énoncés qui satisfont les axiomes de Kolmogorov.
- Mais il y a deux façons différentes d'interpréter ces énoncés :
    - On peut les interpréter comme renvoyant à des **degrés de croyances** des agents, donc de manière **subjective**.
    - Ou comme renvoyant à des degrés liés à des **tendances réelles** existant dans le monde, donc de manière **objective**.

La probabilité au sens subjectif

- Supposons que vous partiez pour une promenade à vélo, et que vous preniez à la fois des lunettes de soleil, et un habit de pluie.

- Est-ce que vous croyez qu'il va pleuvoir ? C'est ce que suggère l'habit de pluie. Ou qu'il ne va pas pleuvoir ? C'est ce que suggèrent les lunettes de soleil.

Les degrés de croyance

- Pour résoudre cette difficulté, on peut parler de **degrés de croyance**.
  - Vous croyez qu'il va pleuvoir, **mais seulement à un certain degré** ; vous croyez aussi à un certain degré qu'il ne va pas pleuvoir mais faire du soleil.
- Les probabilités seraient des mesures du degré de croyance : 1 lorsqu'on est certain qu'une proposition est vraie, 0 lorsqu'on est certain qu'elle est fausse — mais aussi toutes les valeurs entre 0 et 1.

Les paris

- Les probabilités subjectives se manifestent dans l'action : **plus quelqu'un croit que P à un degré élevé, plus cette personne aura tendance à agir sur la base de P si elle en tire un bénéfice, une utilité.**
- Le cas le plus simple est à cet égard **le pari**, car dans un pari, on tire un bénéfice direct d'un choix.

- Etant donnée une proposition P, combien seriez-vous prêt à payer pour participer à un pari rapportant **1 euros si P est vraie ?**

- Il est raisonnable que la fraction de 1 euro que vous êtes prêt à payer mesure votre degré de croyance en P !

  - Si vous êtes prêt à payer 0,5 euro, c'est que votre degré de croyance est au moins de 1/2

  - Si vous êtes prêt à payer 0,95, c'est que vous croyez la proposition au moins à 95%.

  - … etc

Agir, c'est parier !

- Lorsqu'on agit, c'est sur la base de croyances qui ne sont en général pas absolument certaines.
- Toute action implique donc une prise de risque semblable à un pari.

Blaise Pascal
1623-1662

Exemple

- Je traverse la rue car je crois, à un degré élevé, qu'il ne m'arrivera rien ;
- Mais je ne traverse pas le bd périphérique car mon degré de croyance en un danger est bien plus élevé !

L’utilité espérée d’une action

- Faire un choix dépend à la fois de nos degrés de croyance, et de l’utilité que l’on espère obtenir en conséquence du choix.
- Par exemple :
    - Voudriez vous traverser le périphérique en courant pour cent euros ?
    - Et pour cent millions d’euros ?

Image du film
« Ne le dis à personne »

Calcul de l'utilité espérée

- **Utilité espérée = utilité du succès x probabilité du succès + utilité de l'échec x probabilité de l'échec.**
- Dans le cas de la traversée du périphérique, imaginons que si j'échoue je me blesse gravement avec un coût de 100 millions, mais que je sois optimiste et évalue mes chances à 60%, on aura : 0,6x100M - 0,4x100M = 20M

Les paris hollandais (Dutch books)

- **Question** : si nos croyances ont des degrés, pourquoi ces degrés devraient-ils correspondre à des probabilités ?
- C'est-à-dire : pourquoi devraient-ils satisfaire les axiomes de Kolmogorov ?
- **Réponse** : sinon, nos degrés ne seront pas rationnels, ils nous conduirons à échouer systématiquement dans nos paris.

- On dit qu’un pari est un paris « hollandais », si le parieur est certain d’obtenir un bénéfice du pari quelle qu’en soit l’issue.

- Un agent rationnel devrait vouloir éviter qu'on puisse faire un pari hollandais contre lui : car sinon, l’agent est certain d’y perdre !

- Or : **on peut prouver que si vos degrés de croyance ne satisfont pas les axiomes de Kolmogorov, il est possible de faire un pari hollandais contre vous.**

- Ex : je crois que P= « Il fait beau demain a un degré de 75% » et « il ne fait pas beau demain » un degré de 75%.

  - Je donne 0,75 euros pour parier que P, et aussi 0,75 euros pour parier que non P, pour gagner 1 euros.

  - Problème : je dépense 1,5 euros et j'en gagne 1 ==> je suis forcément perdant !

Les probabilités objectives

- Ne pourrait-il pas y avoir du **hasard** dans le monde **même si aucune croyance n'y existait ?**
- Si vous pensez que la réponse est positive, et que l'on peut quantifier ce hasard, alors vous croyez sans doute aussi qu'il y a un sens objectif des probabilités.

Probabilités et mécanique quantique

- Certaines substances, comme le radium, sont radioactives à cause de la désintégration de certains noyaux.
- Mais on ne peut pas prédire si un noyau va se désintégrer à un moment ou pas : sa durée de vie est **aléatoire**.
- Dans le cas du radium, la probabilité de désintégration est 50% pour 1602 ans.
- C’est une **probabilité objective.**

VI Les probabilités conditionnelles et les tests médicaux

Probabilités et tests médicaux

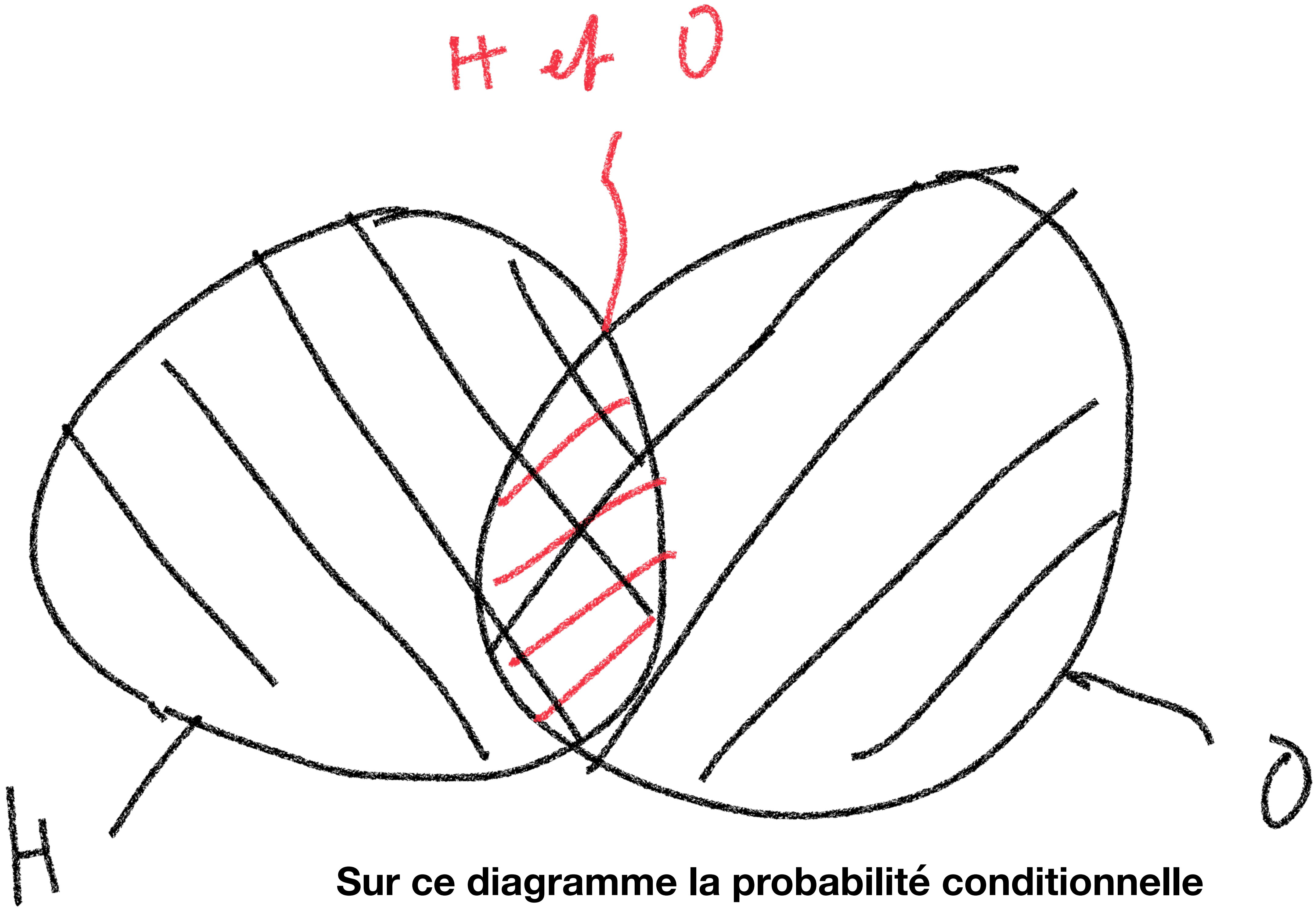
- Pourquoi s'intéresser à un sujet comme les probabilités pour raisonner correctement ?
  - (surtout si on n'aime pas trop les maths ?)
- Réponse : parce que nous sommes souvent **mauvais** lorsqu'il s'agit de construire des inférences statistiques convaincantes
- Un exemple : l'interprétation des tests médicaux

Probabilité conditionnelle

- Mais pour interpréter ces tests, nous avons besoin de définir **la probabilité conditionnelle P(H/O)** : la probabilité que H soit vraie, si O est vraie.

- On peut la définir comme le rapport suivant :

    - P(H et O) / P(O)



Sur ce diagramme la probabilité conditionnelle correspond à la proportion de la partie commune relativement à O

Exemple

- Lançons un dé à six faces, et calculons la probabilité que le dé tombe sur un chiffre pair, sachant qu'il est tombé sur un chiffre supérieur à deux :
  - Pr (chiffre pair / plus de 2)
- C'est le rapport : Pr (chiffre pair et plus de 2) / P(plus de 2), donc :
  - Pr (pair et plus de 2) = 1/3
  - Pr (plus de 2) = 2/3
  - Donc Pr (chiffre pair / plus de 2) = 1/3 / 2/3 = 1/2

Sensibilité, spécificité, fiabilité, prévalence

- La sensibilité d'un test médical est la probabilité d'être positif si l'on est malade

- La spécificité du test, c'est la probabilité d'être négatif si l'on n'est pas malade

- Enfin, on appelle taux de prévalence d'une maladie le nombre total de cas pendant une période ou à un instant donné, rapporté au nombre de sujets de la population

- Mais comment, à partir des informations, déterminer la fiabilité du test ?

Question

- Supposons que vous passiez un test sérologique pour la Covid-19, dont la sensibilité est 94%, et la spécificité 95%.
  - Autrement dit : la probabilité que le test soit positif lorsqu'on a des anticorps est de 94%.
  - La probabilité que le test soit négatif lorsqu'on n'a pas d'anticorps est de 95%.
- Supposons que le test soit positif !
- Quelle est la probabilité que vous ayant des anticorps, en supposant qu'on estime le taux de prévalence en IDF à 1% ?

- Plus de 95%
- 95%
- 94%
- Entre 50% et 94%
- Entre 10% et 50%
- Entre 1% et 10%
- Moins de 1% ?

Sensibilité et fiabilité

- Beaucoup de personnes répondent ici : 94%
- Mais c'est une erreur !
- Cela revient à confondre la sensibilité du test avec sa fiabilité.
  - Sensibilité : **la probabilité que le test soit positif, sachant que j'ai des anticoprs**.
  - Mais ce qui nous intéresse c'est une probabilité différente : **la probabilité que j'ai des anticorps, sachant que le test est positif !**

Faux négatifs

- Supposons que 10000 personnes prises complètement au hasard passent le test

- Les statistiques épidémiologiques nous apprennent que sur ces 10000 personnes :

  - 100 ont des anticorps, soit 1% (NB : c'est une pure hypothèse !)

  - Parmi ces 100 qui ont des anticorps, 94 sont bien testées positives, 6 sont testées négatives.

  - On nomme ces personnes des faux négatifs.

Faux positifs

- Supposons que toute la population passe le test.
- 9 900 personnes n’ont pas d’anticorps.
- Mais sur ces nombreuses personnes qui n’ont pas d’anticorps et qui passent le test, certaines vont se révéler positives !
- Puisque la spécificité est de 95%, il y aura 5% de faux positifs dans cette population, soit 495 faux positifs.

Fiabilité du test lorsqu'il est positif

- Ce qu'il faut regarder maintenant, c'est le rapport entre le nombre de personnes ayant des anticorps qui sortent positives, et le nombre total de personnes qui sortent positives, en incluant les faux positifs.

- Ici : 94 sont testées positives et ont la maladie, 495 sont des faux positifs.

- Fiabilité = 94 / 589 = **16% ==> il est en fait probable que vous ne soyez pas malade**

- Nous voyons que nous sommes très loin de 94%, et ceci en supposant une prévalence assez élevée de 1% !

Fiabilité du test lorsqu’il est négatif

- Supposons maintenant que le test soit négatif.

- On a vu que sur 10 000 personnes, on a 6 faux négatifs

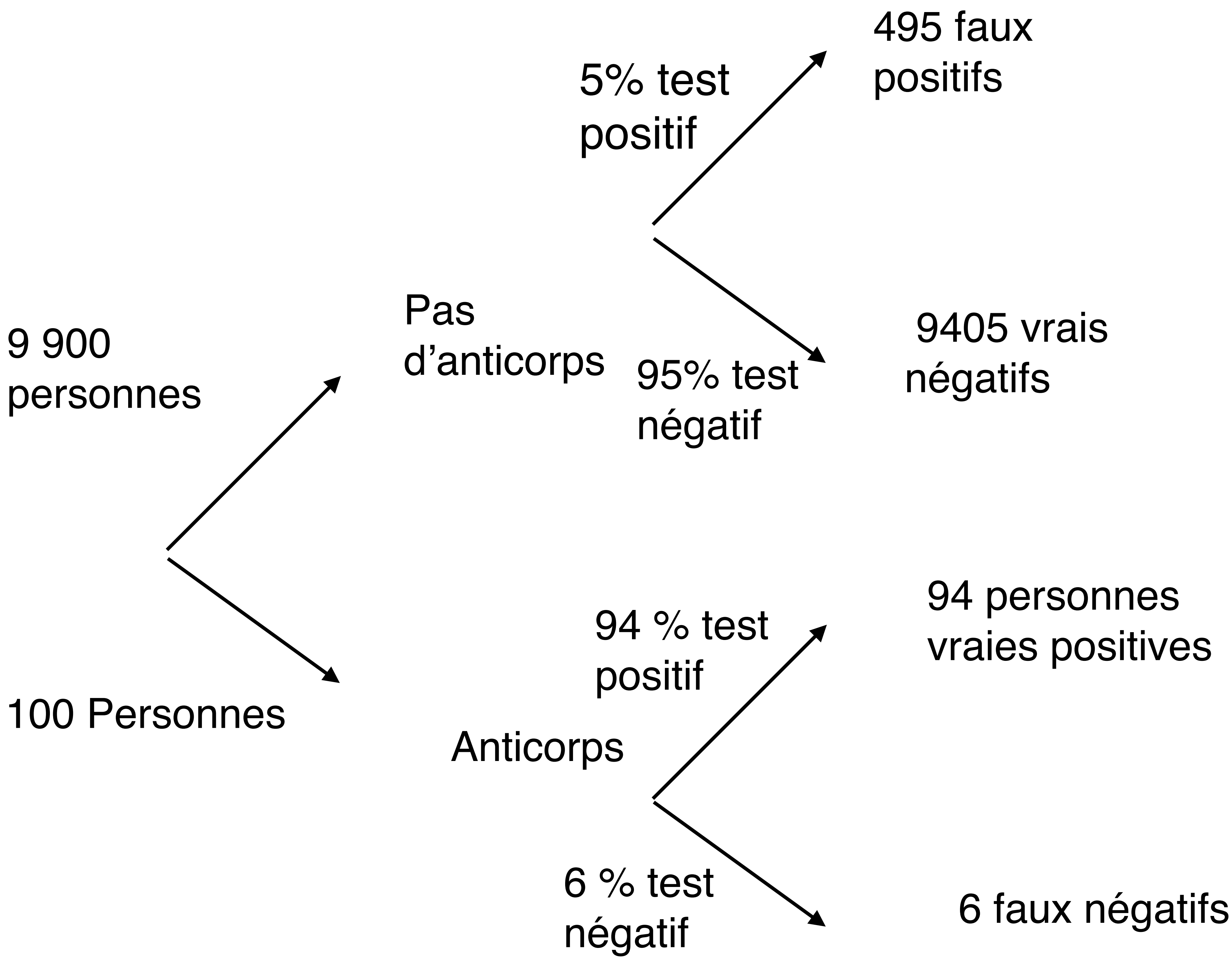
- 9 900 personnes n’ont d’anticorps, sur ces 9 900, 495 sont des faux positifs, et 9405 des vrais négatifs.

- La probabilité que vous êtes négatif si le test est négatif est de 99,9 %

- Donc cette fois, vous pouvez être presque certain que vous êtes bien négatif !

Comment progresser

- Pour ceux qui connaissent, appliquer le théorème de Bayes, dont l'utilisation est expliquée dans les compléments ; ou :
- <u>Toujours partir du taux de base </u>indiquant la prévalence d'une caractéristique C, et distinguer deux cas :
  - le cas où x a la caractéristique C
  - le cas où x n'a pas la caractéristique C
- Raisonner ensuite dans chaque cas avant de



Au total : probabilité de 94 / (94+495)= 16%

Compléments sur Bayes

NB : ces compléments ne sont pas à connaître pour l'examen

Le théorème de Bayes

$$P(H/O) = \frac{P(O/H) x P(H)}{P(O/H) x P(H) + P(O/nonH) x P(nonH)}$$

Application aux tests médicaux

- P(H/O) = probabilité que le patient ait la condition H sachant que le test est positif
- P(O/H) = sensibilité du test, ie probabilité d'être positif si l'on a la condition H
- P(H) = probabilité a priori que le patient présente la condition, que l'on peut estimer à partir du taux de prévalence de la condition H dans la population

- P(O/nonH) = taux de faux positifs (ici 5%)
- Pour notre exercice :
- P(H/O) = sensibilité x taux de prévalence / (sensibilité x taux de prévalence + taux de faux positifs x (1-taux de prévalence)
- = 94%x1% / (94%x1% + 5%x99%)
- 0,0094 / (0,0094 + 0,0495)= 15,9%

Approche Bayésienne des croyances

- Considérons cette seconde formulation du théorème :
  - $P(H/O) = (P(O/H) \times P(H)) \ / \ P(O)$
- Dans ce cas :

- $P(H)$ = probabilité initiale (ou antécédante) de l'hypothèse
- $P(H/O)$ = la probabilité finale, c'est-à-dire la nouvelle probabilité qu'on doit attribuer à H pour tenir compte des données O
  - Lorsque $P(H/O) > P(H)$, on dit que les données O confirment l'hypothèse
  - Lorsque $P(H/O) < P(H)$, on dit que les données O infirment l'hypothèse

- Supposons que les données O puissent être prédites à partir de l'hypothèse H, c'est-à-dire qu'elles découlent logiquement de H

- Dans ce cas $P(O/H) = 1$ et donc $P(H/O) = P(H) / P(O)$

- Comme $P(O)$ est une probabilité, nécessairement dans ce cas $P(H/O) > P(H)$ et donc les données confirment l'hypothèse

Probabilités et Réfutation

- Que se passe-t-il selon le théorème si $P(O/H) = 1$ mais qu'on observe non O, c'est-à-dire que les données contredisent l'hypothèse ?
- $P(\text{non } O / H) = 0$
- $P(H/ \text{non } O) = P(H) \times P(\text{non } O / H) / P(O)$

  $= 0$
- On voit donc que conformément à ce que nous dit la logique, des données qui contredisent une hypothèse réduisent sa probabilité à 0, et donc la réfutent

Probabilités et proportions

- Remarquons d'abord que de nombreux arguments inductifs comportent des mots qui expriment des <u>proportions</u> :
  - La plupart des étudiants de philosophie politique sont des filles ; toutes les filles sont sérieuses ; la plupart des étudiants de philosophie sont sérieux.
  - Peu de filles étudient la logique ; Kim étudie la logique ; Kim est un garçon.

- La plupart des A sont B : la proportion des A qui sont B est supérieure à 50%.

- Exemple : la plupart des pommes sont pourries = la proportion des pommes pourries est supérieure à 50%

- Peu de A sont B : la proportion des A qui sont B est inférieure à 50%

- Or dans certains cas, la probabilité dépend directement de la proportion.

- Supposons ainsi qu'il y ait 10 pommes pourries sur 100. La proportion de pommes pourries = 10%. La probabilité de tirer une pomme pourrie si l'on tire une pomme au hasard est aussi égale à 10%

Probabilité et fréquence

- Supposons maintenant que vous désiriez savoir quelle est la probabilité qu'il pleuve à Abou Dhabi en février prochain.
- On ne peut pas faire appel ici à une proportion ; mais en revanche, on peut partir des fréquences
- Par exemple, on peut considérer les 100 dernières années, et compter celles où il a plu en février, en les comparant à celles où il n'a pas plus.
- Cela donne la fréquence de l'événement, par exemple 33% s'il pleut une année sur 3 en février.

Probabilités et degrés de croyance

- Dans certains cas cependant on parle de probabilités même là où l'on ne peut calculer ni des proportions, ni des fréquences
- C'est ainsi le cas lorsqu'on l'on parle de la probabilité d'un événement, relativement aux informations et aux données (evidence) dont on dispose à un moment donné.
- La probabilité mesure alors un degré de croyance, il s'agit d'une probabilité au sens subjectif expliqué plus haut.

- A :“Il est probable à 90% (à la lumière de ce que l’on sait) que les dinosaures aient disparu à cause d’un astéroïde géant ayant heurté la terre”

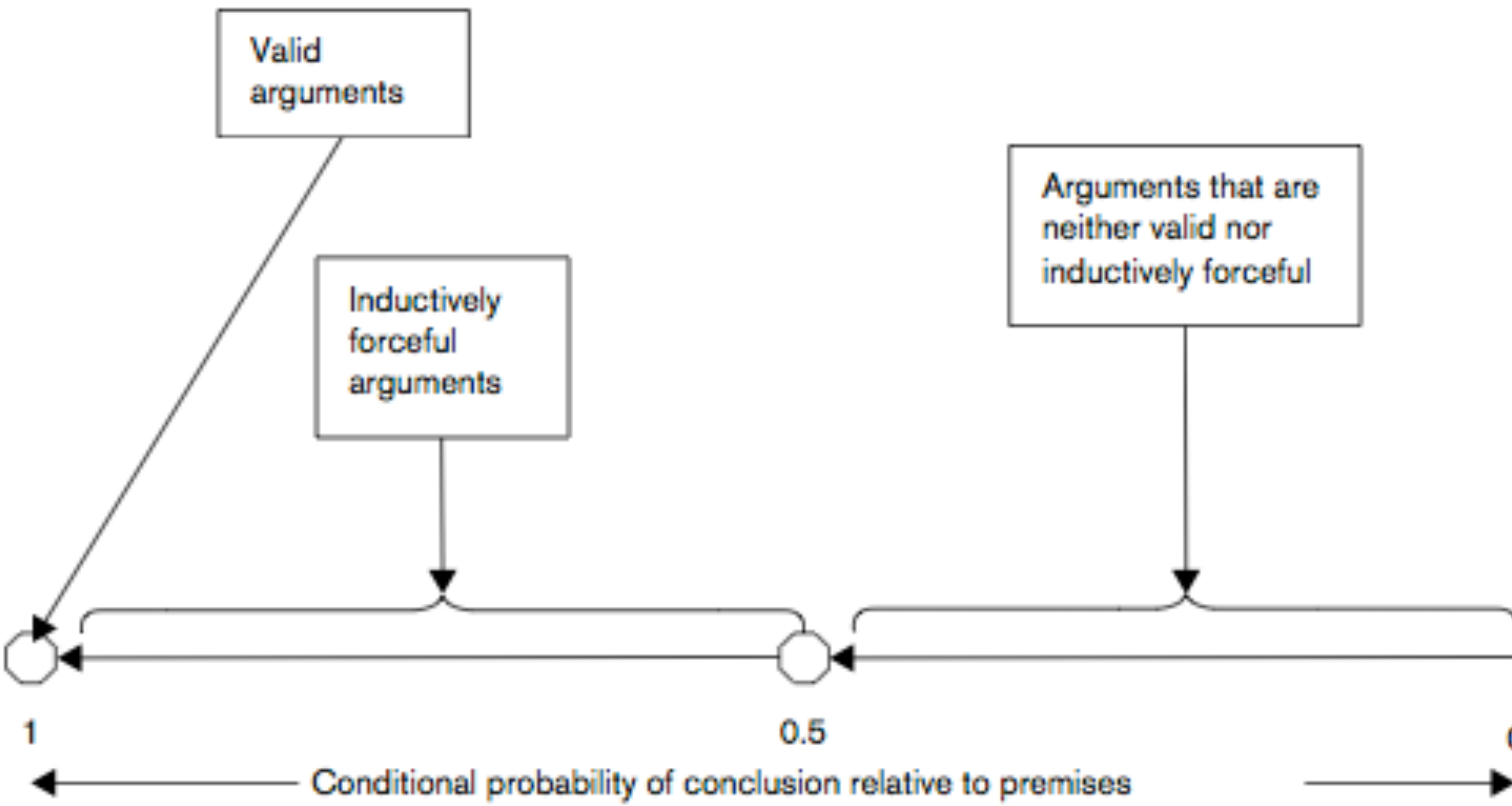
- B :“Les dinosaures ont été détruits par un astéroïde géant ayant heurté la terre”

- La vérité de A dépend des informations dont nous disposons à l’appui de la thèse B (en revanche, la vérité de B ne dépend que d’un état de choses).

Nouvelle définition

On peut redéfinir les arguments inductivement forts en utilisant ce concept de probabilité relative, ou conditionnelle (la probabilité de P sachant Q) :

> Dans un argument inductivement fort, la probabilité de la conclusion si l'on suppose que les prémisses sont vraies est supérieure à 50%, et inférieure à 1.


Valid arguments
Inductively forceful arguments
Arguments that are neither valid nor inductively forceful
1
0.5
0
Conditional probability of conclusion relative to premises

Fin des compléments